שאלה1: (10 נקודות)

בעזרת החלפת המשתנים $\begin{cases} x=(3+\rho\cos\theta)\cos\phi \\ y=(3+\rho\cos\theta)\sin\phi \\ z=\rho\sin\theta \end{cases}$

$(0\le\rho<3\,,\,0\le\phi<2\pi\,,\,0\le\theta<2\pi)$

מצאו נפח של הטורוס $T=\left\{(x,y,z):\left(x^2+y^2+z^2+8\right)^2\le 36\left(x^2+y^2\right)\right\}$

פתרון: כאשר מציבים את $z(\rho,\varphi,\theta)$, $y(\rho,\varphi,\theta)$, $x(\rho,\varphi,\theta)$ באי שוויון המגדיר את הקבוצה T מקבלים אי שוויון $\rho\le 1$, כלומר החלפת המשתנים הנ"ל מעבירה את התיבה $G=\{(\rho,\varphi,\theta):0\le\rho\le 1\,,\,0\le\varphi<2\pi\,,\,0\le\theta<2\pi\}$ במרחב $\rho\varphi\theta$ לטורוס T במרחב xyz .

נמצא את היעקוביאן של החלפת המשתנים הזאת:

$$J(\rho,\varphi,\theta)=\det\begin{bmatrix} x_\rho & x_\varphi & x_\theta \\ y_\rho & y_\varphi & y_\theta \\ z_\rho & z_\varphi & z_\theta \end{bmatrix}=$$

$$=\det\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi & -(3+\rho\cos\theta)\sin\phi & -\rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi & (3+\rho\cos\theta)\cos\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta & 0 & \rho\cos\theta \end{bmatrix}=\rho(3+\rho\cos\theta)$$

כעת נחשב את הנפח המבוקש:

$$Volume(T)=\iiint_T dxdydz=\iiint_G |J(\rho,\phi,\theta)|\,d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi}\rho(3+\rho\cos\theta)d\theta=6\pi^2$$

שאלה 2: (10 נקודות)

נתונים שדה וקטורי $\vec{F}(x,y,z)=\dfrac{(yz,xz,xy)}{x^2+y^2+z^2+1}$, ספרה $S_1=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=1\}$, ומשטח $S_2=\{(x,y,z)\,|\,xyz=0.1\}$. יש לחשב את האינטגרל $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ כאשר C הינו קטע ישר המחבר את הראשית עם הנקודה M_0 , $M_0\in S_1\cap S_2$.

הערה: כדאי לבצע את החישוב **באופן ישיר** בעזרת פרמטריזציה של העקום

פתרון

משוואת קטע C : $x=x_0t$, $y=y_0t$, $z=z_0t$, t משתנה מ- 0 ל- 1 .

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^1\left(\frac{y_0tz_0tx_0+x_0tz_0ty_0+x_0ty_0tz_0}{x_0^2t^2+y_0^2t^2+z_0^2t^2+1}\right)dt=\int_0^1\left(\frac{3\cdot 0.1t^2}{t^2+1}\right)dt=0.3\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

שאלה 3: (20 נקודות)

חשב שטח פנים של משטח כדורי $x^2+y^2+z^2=4$ החסום בתוך הגליל $x^2+y^2=2x$

פתרון: המשטח סימטרי ביחס למישור $z=0$ ולכן מספיק לחשב שטח הפנים עבור $z\ge 0$ ולכפול את התוצאה ב- 2 . $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

$$z_x{}'=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\ ,\ z_y{}'=\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$\iint_D\sqrt{1+\left(z_x{}'\right)^2+\left(z_y{}'\right)^2}\,dxdy=2\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

נכפול ב-2 ונעבור לקוטביות. ההיטל D הוא מעגל. $r^2=2r\cos\varphi$ ולכן $r=2\cos\varphi$ כאשר $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

מכאן $4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\frac{rdr}{\sqrt{4-r^2}}=16\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

הערה: $\sqrt{\sin^2\varphi}=|\sin\varphi|$

שאלה 4: (10 נקודות)

יהי $D\subseteq R^3$ תחום פשוט קשר. תהי פונקציה $f:D\to R$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר שני המקיימת:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

עבור כל נקודה $(x,y,z)\in D$. יהי $\Phi\subset D$ משטח סגור וחלק. נסמן ב $\hat{n}$ את וקטור היחידה הנורמל למשטח Φ (מכוון החוצה). יש להראות כי $\oiint_\Phi\frac{\partial f}{\partial n}dS=0$ כאשר $\frac{\partial f}{\partial\hat{n}}$ היא נגזרת מכוונת של f בכיוון הווקטור $\hat{n}$.

פתרון: כיון ש- $\frac{\partial f}{\partial\hat{n}}=\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla f$ הפתרון מיידי על ידי שימוש במשפט הדיברגנץ.